

**Deformacija nosača – primena principa virtualnih sila**

Princip virtualnih sila jednog elastičnog linijskog sistema izveden je iz veze pomeranja, obrtanja i deformacijskih veličina štapova i iz uslova kompatibilnosti:

$$\sum \bar{P} \cdot s + \sum \bar{C} c = \int (\bar{M}\chi + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\varphi_t) d_s$$

*rad spoljašnjih sila                  rad unutrašnjih sila*

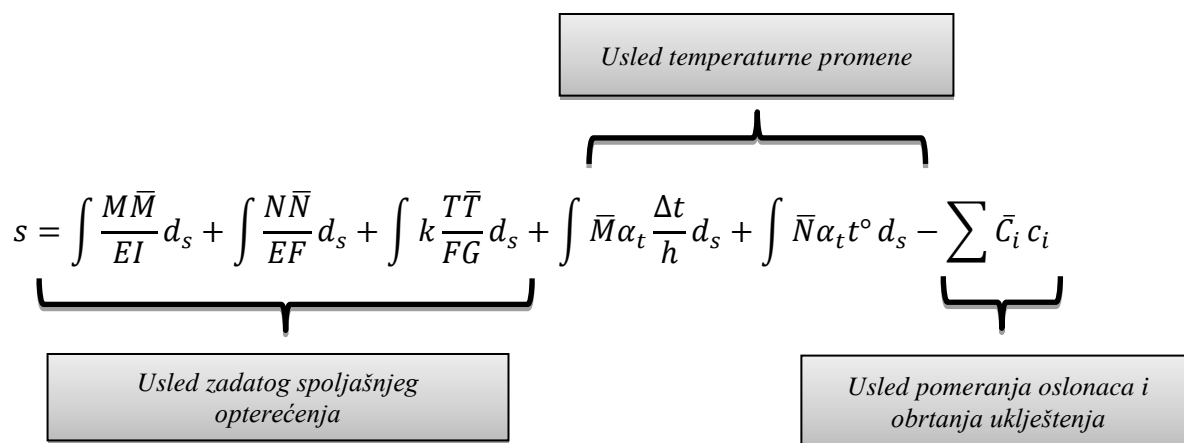
Za elastični ravan linijski nosač koji se ponaša po Hukovom zakonu, deformacijske veličine su:

$$\chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t^\circ$$

$$\varphi_t = k \frac{T}{FG}$$

Ukoliko na nosač djeuje jedinična generalisana sila  $\bar{P} = 1$ , tada je pomeranje  $s$ , u pravcu i smeru jedinične generalisane sile, dato izrazom:



- **M, T, N** – sile u presecima usled stvarnog opterećenja
- **$\bar{M}, \bar{T}, \bar{N}$**  – sile u presecima usled generalisane sile
- **E** – modul elastičnosti materijala
- **G** – modul klizanja
- **$\alpha_t$**  – koeficijent temperaturne dilatacije 1/°C
- **$\Delta t$**  – temperaturna razlika između donjeg i gornjeg pojasa
- **$t^\circ$**  – temperaturna promena u osi štapa
- **$\bar{C}_i$**  – reakcije oslonca usled jedinične generalisane sile
- **$\bar{c}_i$**  – zadato pomjeranje oslonca u pravcu reakcije  $\bar{C}_i$

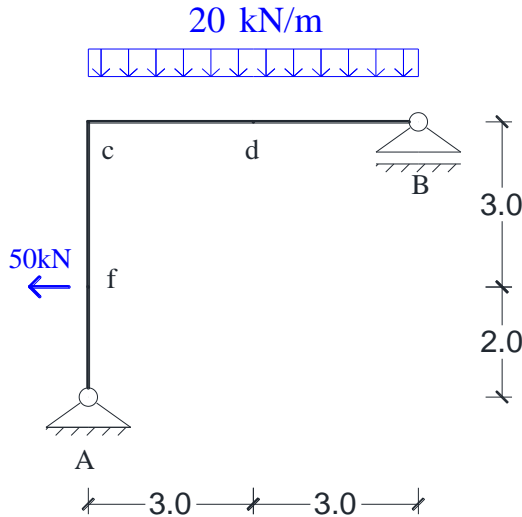
# STATIKA KONSTRUKCIJA 1 - VEŽBE

**Zadatak:** Za nosač sa slike odrediti:

- a) Pomjeranje čvora „f“ u pravcu oslonca „B“
- b) Obrtanje presjeka „d“
- c) Razmicanje tačaka „f“ i „d“
- d) Promjenu ugla između presjeka „f“ i „d“
- e) Promjenu ugla između štapova „f-c“ i „d-B“

Usled:

- 1) Zadatog opterećenja sa slike
- 2) Temperaturne promene u štapu „c-b“ ( $t_u = +25^\circ\text{C}$ ,  $t_o = -5^\circ\text{C}$ )
- 3) Sleganja oslonca „B“ za  $c_b = 2\text{cm}$ .



- Horizontalni štap  $b/h=0,3/0,5\text{m}$
- Vertikalni štap  $b/h=0,3/0,4\text{m}$
- $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$
- $\alpha_t = 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$

Generalisano pomeranje uz zanemarivanje transverzalnih sila:

$$EI_c s = \int M \bar{M} \frac{I_c}{I} d_s + \frac{I_c}{F_c} \int N \bar{N} \frac{F_c}{F} d_s + EI_c \int \bar{M} \alpha_t \frac{\Delta t}{h} d_s + EI_c \int \bar{N} \alpha_t t^o d_s - EI_c \sum \bar{C}_i c_i$$

$l'$

$l''$

-Geometrijske karakteristike preseka:

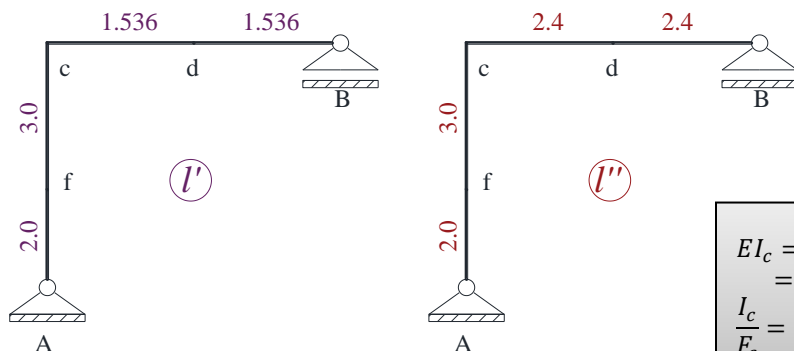
Štap	b/h [m]	$I [\text{m}^4]$	$F [\text{m}^2]$
a-c	0.3/0.4	<b>0.0016 = <math>I_c</math></b>	<b>0.12 = <math>F_c</math></b>
c-b	0.3/0.5	0.003125	0.15

-Redukovane dužine

$$l' = \frac{I_c}{I} d_s; \quad l'' = \frac{F_c}{F} d_s$$

$I_c$ - uporedni moment inercije

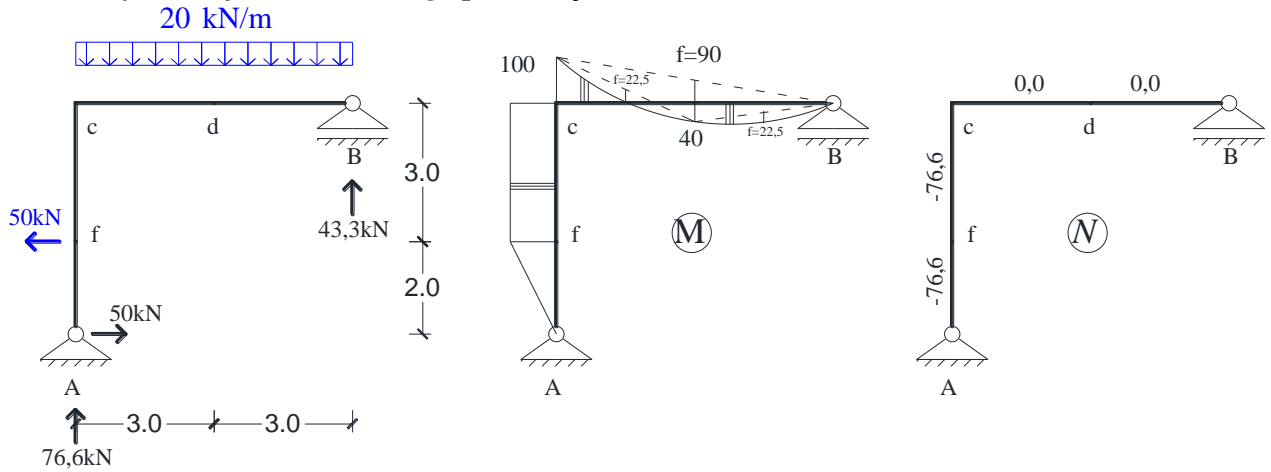
$F_c$ - uporedna površina



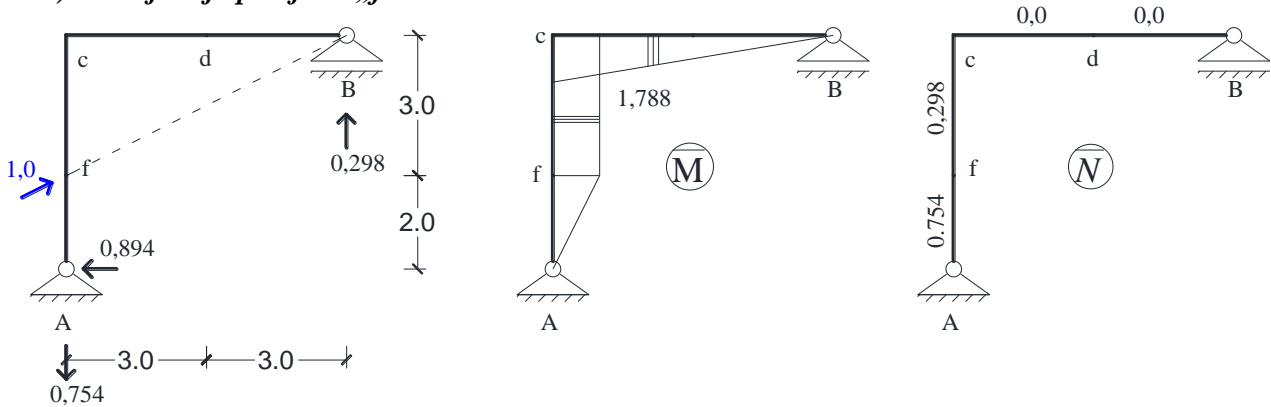
$$EI_c = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,016 = 32000 \text{ kNm}^2$$

$$\frac{I_c}{F_c} = 0,013 \text{ m}^2$$

1. Deformacija usled zadatog opterećenja



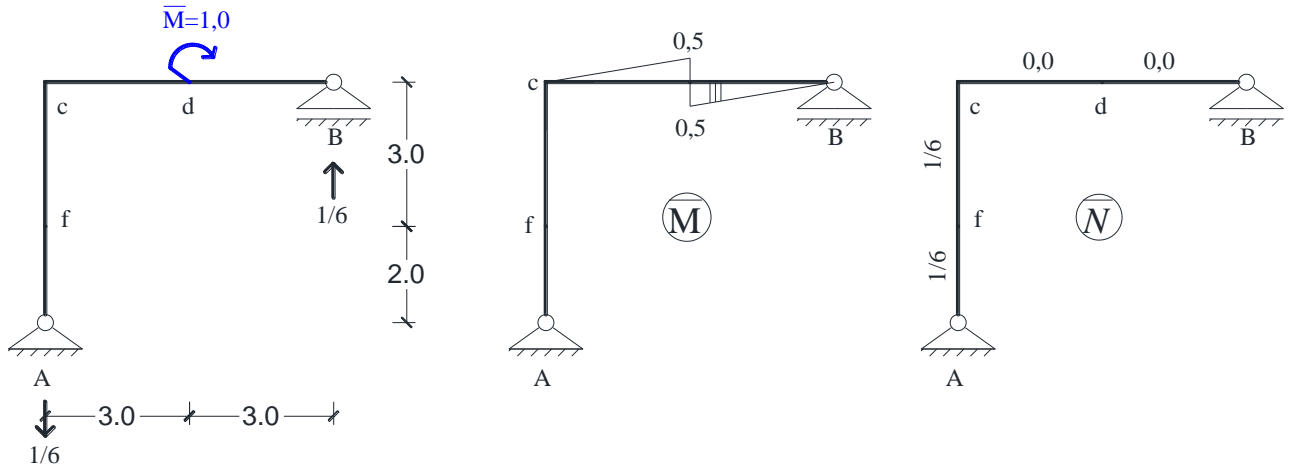
a) Pomjeanje presjeka „f“



$$EI_c \delta = -\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 100 \cdot 1,788 - 3 \cdot 100 \cdot 1,788 - \frac{1}{3} \cdot 3,072 \cdot 100 \cdot 1,788 + \frac{1}{3} \cdot 3,072 \cdot 90 \cdot 1,788 + 0,013 [2 \cdot (-76,6) \cdot 0,754 + 3 \cdot (-76,6) \cdot 0,298] = -676,35 \text{ kNm}^3$$

$$\delta = \frac{-676,35}{32000} = -0,021 \text{ m}$$

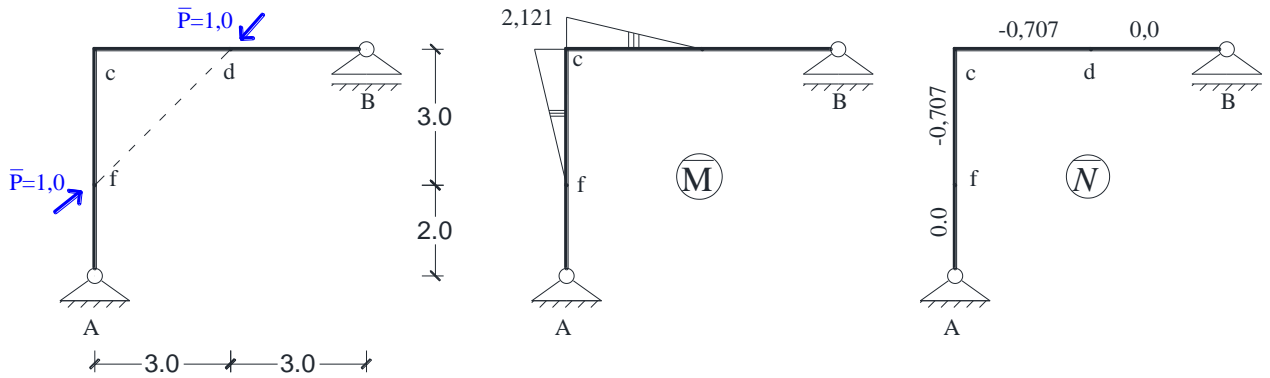
b) Obrtanje presjeka „d“



$$EI_c \varphi_d = \frac{1,536}{6} \cdot 0,5 \cdot (-2 \cdot 40 + 100) - \frac{1,536}{3} \cdot 0,5 \cdot 22,5 + \frac{1,536}{3} \cdot 0,5 \cdot 40 + \frac{1,536}{3} \cdot 0,5 \cdot 22,5 + 0,013 \cdot 5 \cdot (-76,6) \cdot 0,1666 = 11,97 \text{ kN/m}^2$$

$$\delta = \frac{11,97}{32000} = 0,000374 \text{ rad}$$

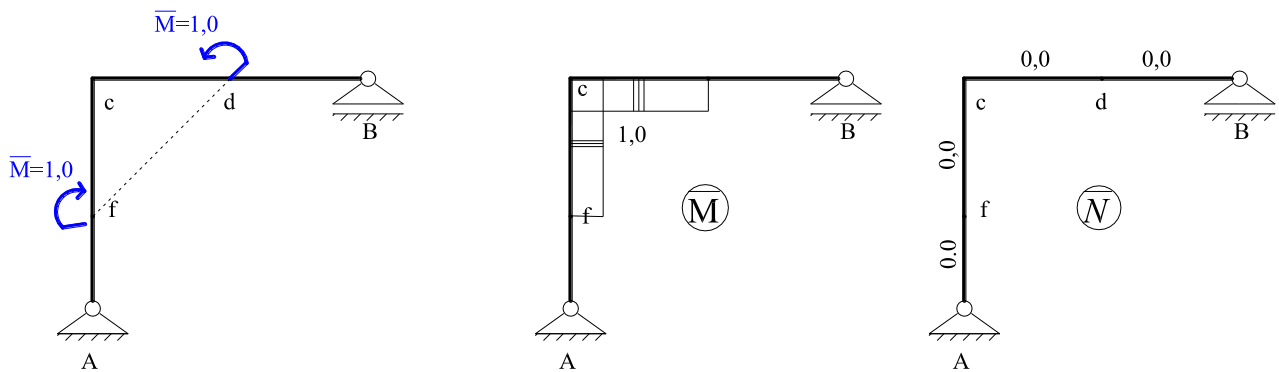
c) Razmicanje tačka „f“ i „d“



$$EI_c \Delta_{fd} = \frac{1,536}{6} 2,121 \cdot (2 \cdot 100 - 40) - \frac{1,536}{3} \cdot 2,121 \cdot 22,5 + \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot 2,121 + 0,013 \cdot 3 \cdot (-76,6) \cdot (-0,707) = 382,71 \text{ kNm}^3$$

$$\delta = \frac{382,71}{32000} = 0,01196 \text{ m}$$

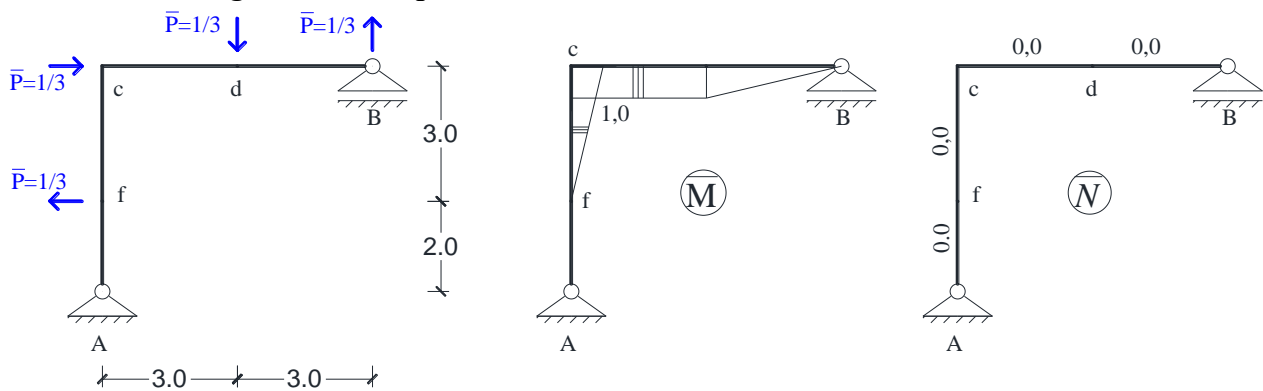
d) Promena ugla između „f“ i „d“



$$EI_c \Delta \varphi_{fd} = \frac{1,536}{2} 1 \cdot (-100 + 40) + \frac{2}{3} \cdot 1,536 \cdot 1 \cdot 22,5 - 3 \cdot 100 \cdot 1 = -323,04 \text{ kN/m}^2$$

$$\delta = \frac{-323,04}{32000} = -0,0101 \text{ rad}$$

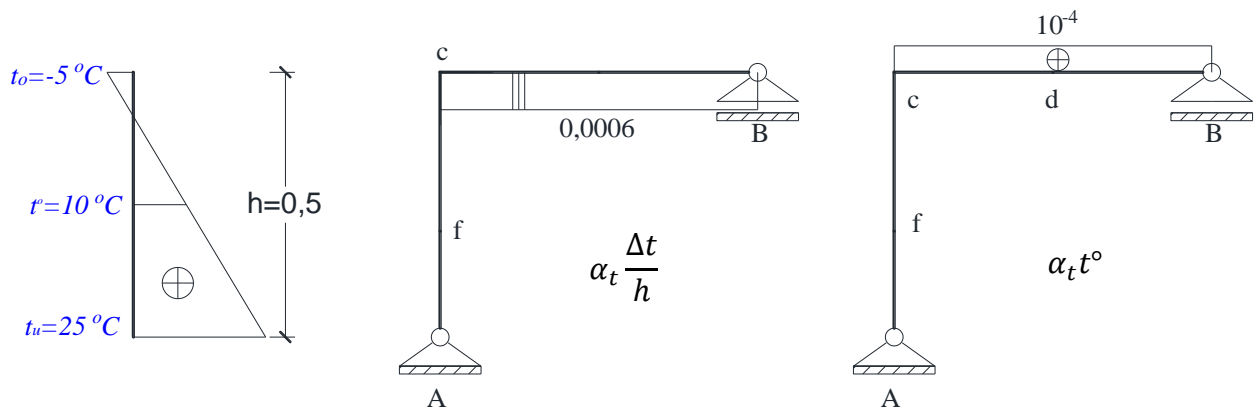
e) Promena ugla između štapova



$$EI_c \Delta \varphi = -\frac{3}{2} 1 \cdot 100 + \frac{1,536}{2} 1 \cdot (-100 + 40) + \frac{2}{3} \cdot 1,536 \cdot 22,5 \cdot 1 + \frac{1,536}{2} 1 \cdot 40 + \frac{1,536}{2} 1 \cdot 22,5 = -141,04 \text{ kN/m}^2$$

$$\delta = \frac{-141,04}{32000} = -0,0044 \text{ rad}$$

2. Deformacija usled temperature promene



$t^\circ = 10^\circ\text{C}$   
 $\Delta t = t_u - t_o = 25 + 5 = +30^\circ\text{C} \rightarrow$

**CRTA SE SA ONE STRANE PRESEKA GDJE JE TEMPERATURANA „+“**

a) Pomeranje presjeka „f“

$\delta = \frac{6}{2} \cdot 0,0006 \cdot 1,788 = 0,0032 \text{ m}$

**Stvarna dužina!!!**

b) Obrtanje presjeka „d“

$\varphi_d = -\frac{3}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,0006 + \frac{3}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,0006 = 0$

d) Promena ugla između „f“ i „d“

$\Delta\varphi_{fd} = 3 \cdot 1 \cdot 0,0006 = 0,0018 \text{ rad}$

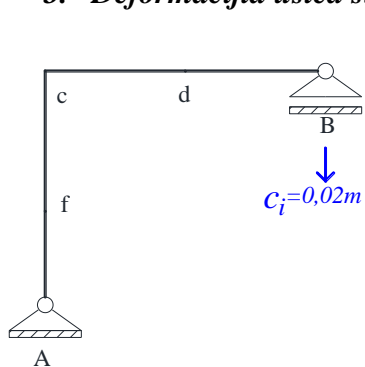
c) Razmicanje tačaka „f“ i „d“

$\Delta_{fd} = -\frac{3}{2} \cdot 2,121 \cdot 0,0006 + 3 \cdot (-0,707) \cdot 10^{-4}$   
 $= -0,00212 \text{ m}$

e) Promena ugla između štapova

$\Delta\varphi = 3 \cdot 1 \cdot 0,0006 + \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 0,0006 = 0,0027 \text{ rad}$

3. Deformacija usled sleganja oslonca B za 2cm



a) Pomeranje

$\delta = -\sum \bar{c}_i c_i = -[0,298 \cdot (-0,02)] = +0,00596 \text{ m}$

$\bar{c}_i$  - reakcija oslonca usled generalisane sile  
 $c_i$  - pomeranje oslonca (zadato)

b) Obrtanje presjeka „d“

$\varphi_d = -\sum \bar{c}_i c_i = -\left[\frac{1}{6} \cdot (-0,02)\right] = 0,00333 \text{ rad}$

c) d) e) deformacija je nula jer ne postoji reakcija oslonca „B“ usled generalisanih sila!