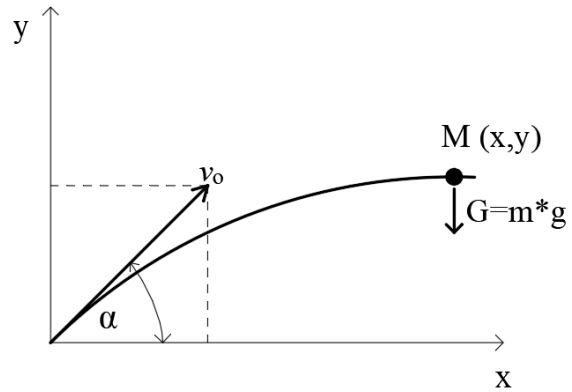


ПРИПРЕМА ЗА КОЛОКВИЈУМ 2

Задатак 1: Материјална тачка масе $m=10\text{kg}$ је бачена из координатног почетка почетном брзином $v_0 = 5\text{m/s}$ под углом $\alpha = 60^\circ$. Одредити трајекторију и написати коначну једначину кретања, као и тренутак када материјална тачка удари о подлогу.

II Њутн-ов закон: $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{G} = m \cdot \vec{g} \\ \vec{a} &= \{\ddot{x}, \ddot{y}\} \\ m \cdot \vec{g} &= m\{0; -g\}\end{aligned}$$



$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g}$ - диференцијална једначина кретања у векторском облику

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{x} &= 0 / : m \\ \ddot{x} &= 0 / \int \\ \dot{x} &= \int 0 \\ \dot{x} &= C_1 / \int \\ x &= C_1 \cdot t + C_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{y} &= -m \cdot g / : m \\ \ddot{y} &= -g / \int \\ \dot{y} &= \int -g \\ \dot{y} &= -g \cdot t + C_3 / \int \\ y &= -g \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4\end{aligned}$$

Константе C_1, C_2, C_3 и C_4 одређују се из почетних услова:

$$\begin{aligned}t = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ \dot{x} &= v_0 \cos \alpha \\ x &= C_1 \cdot t + C_2 \\ 0 &= C_1 \cdot 0 + C_2 \\ C_2 &= 0 \\ \dot{x} &= C_1 \\ \dot{x} &= v_0 \cos \alpha = 5 \cos 60 = 2.5 = C_1\end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2.5 \cdot t} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}t = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ \dot{y} &= v_0 \sin \alpha \\ y &= -g \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4 \\ 0 &= \frac{-g \cdot 0}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0 \\ \dot{y} &= -g \cdot t + C_3 \\ v_0 \cdot \sin \alpha &= -g \cdot 0 + C_3 \\ C_3 &= v_0 \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \sin 60 = 4.33\end{aligned}$$

$$\boxed{y = -g \cdot \frac{t^2}{2} + 4.33 \cdot t} \quad (2)$$

Уколико из прве коначне једначине изразимо t

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{2.5}$$

и уврстимо у другу једначину

$$t \Rightarrow (2) \Rightarrow y = \frac{-g}{2} \cdot \frac{x^2}{2.5^2} + 4.33 \cdot \frac{x}{2.5}$$

добија се трајекторија:

$$y = -0.8 \cdot x^2 + 1.73 \cdot x$$

У тренутку када материјална тачка падне на подлогу имамо да је

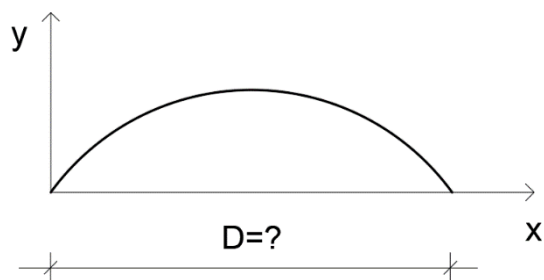
$$y = 0 \Rightarrow 0 = x \cdot (-0.8 \cdot x + 1.73)$$

а ординату x одређујемо:

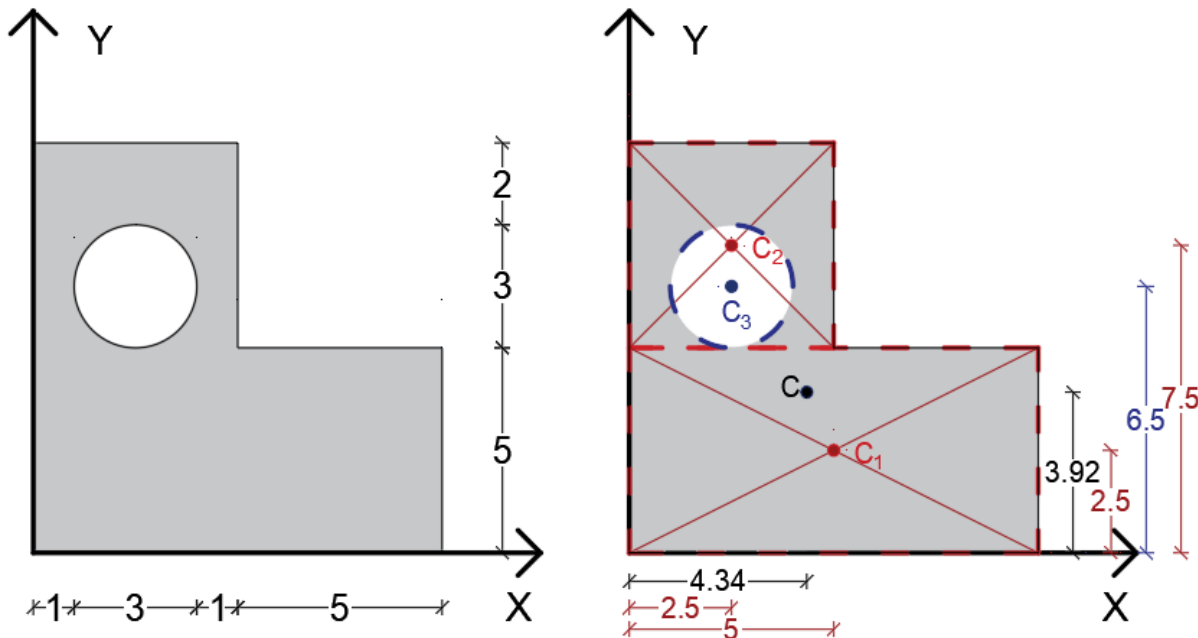
$$x = \frac{1.73}{0.8} = 2.16\text{м}$$

Тренутак када материјална тачка удари о подлогу:

$$t = \frac{x}{2.5} = \frac{2.16}{2.5} = 0.864\text{ s}$$



Задатак 2: За тело са слике одредити I_x и I_y .



Тело	Тежиште $C(x; y)$	Површина $F(\text{cm}^2)$
1 (+)	$C_1(5; 2.5)$	$F_1 = 10 \times 5 = 50$
2 (+)	$C_2(2.5; 7.5)$	$F_2 = 5 \times 5 = 25$
3 (-)	$C_3(2.5; 6.5)$	$F_3 = 1.5^2 \pi = 7.07$

$$F = \sum_{i=1}^3 F_i = 50 + 25 - 7.07 = 67.93 \text{ cm}^2$$

Тежиште фигуре

$$X = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^3 F_i \cdot x_i = \frac{50 \cdot 5 + 25 \cdot 2.5 - 7.07 \cdot 2.5}{67.93} = 4.34 \text{ cm}$$

$$Y = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^3 F_i \cdot y_i = \frac{50 \cdot 2.5 + 25 \cdot 7.5 - 7.07 \cdot 6.5}{67.93} = 3.92 \text{ cm}$$

Момент инерције:

$$I_{x1} = \frac{10 \cdot 5^3}{12} = 104.17 \text{ cm}^4$$

$$I_{x2} = \frac{5 \cdot 5^3}{12} = 52.08 \text{ cm}^4$$

$$I_{x3} = 0.7854 \cdot 1.5^4 = 3.98 \text{ cm}^4$$

$$I_{y1} = \frac{10^3 \cdot 5}{12} = 416.67 \text{ cm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{5^3 \cdot 5}{12} = 52.08 \text{ cm}^4$$

$$I_{y3} = 0.7854 \cdot 1.5^4 = 3.98 \text{ cm}^4$$

$$I_x = \sum_{i=1}^3 I_{xi} + F_i \cdot \Delta y_i^2$$

$$\Delta y_1 = Y_1 - Y = -1.42 \text{ cm}$$

$$\Delta y_2 = Y_2 - Y = 3.58 \text{ cm}$$

$$\Delta y_3 = Y_3 - Y = 2.58 \text{ cm}$$

$$I_x = \sum_{i=1}^3 I_{xi} + F_i \cdot \Delta y_i^2 = 104.17 + 50 \cdot (-1.42)^2 + 52.08 + 25 \cdot 3.58^2 - 3.98 - 7.07 \cdot 2.58^2 = 526.44 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 I_{yi} + F_i \cdot \Delta x_i^2$$

$$\Delta x_1 = X_1 - X = 0.66 \text{ cm}$$

$$\Delta x_2 = X_2 - X = -1.84 \text{ cm}$$

$$\Delta x_3 = X_3 - X = -1.84 \text{ cm}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 I_{yi} + F_i \cdot \Delta x_i^2 = 416.67 + 50 \cdot 0.66^2 + 52.08 + 25 \cdot (-1.84)^2 - 3.98 - 7.07 \cdot (-1.84)^2 = 547.25 \text{ cm}^4$$