

## КРЕТАЊЕ ЦЕНТРА МАСЕ И ЗАКОН ПРОМЕНЕ МОМЕНТА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА

**Задатак 1:** На котур масе  $m=15\text{kg}$  полупречника  $r=0.5\text{m}$  намотано је нерастегљиво уже занемарљиве масе. Сила  $F$  на уже делује као на слици. Потребно је одредити:

- a) Убрзање центра котура,  $a_0=?$ ;
- b) Угаоно убрзање центра котура,  $\varepsilon=?$
- c) Убрзање ужета,  $a_A=?$ .

$$F = 180 \text{ N}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- a) Убрзање центра котура

$$m \cdot a_0 = F - m \cdot g$$

$$a_0 = \frac{F - m \cdot g}{m} = \frac{180 - 15 \cdot 10}{15} = 2 \text{ m/s}^2$$

- b) Угаоно убрзање центра котура

Закон промене момента количине кретања

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{Rz}^s$$

Момент спољашњих сила у односу на пол

$$M_{Rz}^s = F \cdot r$$

$$L_z = I_z \cdot \omega; \quad I_z = \text{const}; \quad \omega = \omega(t)$$

$$\frac{d}{dt} [I_z \cdot \omega] = F \cdot r$$

$$I_z \cdot \varepsilon = F \cdot r \Rightarrow \varepsilon = \frac{F \cdot r}{I_z}$$

Момент инерције за диск:

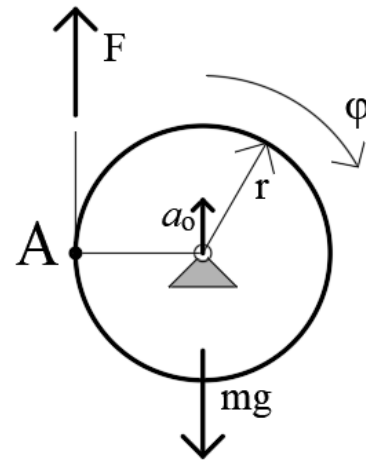
$$I_z = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{2} 15 \cdot 0.5^2 = 1.875 \text{ kgm}^2$$

$$\varepsilon = \frac{F \cdot r}{I_z} = \frac{180 \cdot 0.5}{1.875} = 48 \text{ rad/s}^2$$

- c) Убрзање ужета

$$V_A = v_0 + \omega \cdot r / dt$$

$$a_A = a_0 + \varepsilon \cdot r = 2 + 48 \cdot 0.5 = 26 \text{ m/s}^2$$



**Задатак 2:** За котур повезан са 2 тела А и В помоћу нерастегљивих ужади занемарљиве масе. Одредити:

- Угаону брзину котура,  $\varepsilon = ?$ ;
- Убрзање тела А и В,  $a_A = ?$ ,  $a_B = ?$

$r = 15.2 \text{ cm}$ ;  $R = 25.4 \text{ cm}$ ;  $m_A = 2.27 \text{ kg}$ ;  $m_B = 4.5 \text{ kg}$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $m = 5.44 \text{ kg}$ ;

$i_z = 20.3 \text{ cm}$

- Угаону брзину котура

$$I_z \cdot \varepsilon = -m_A \cdot g \cdot R + m_B \cdot g \cdot r$$

$$I_z = m \cdot i_z^2 = 5.44 \cdot 0.203^2 = 0.224 \text{ kgm}^2$$

$$I_z \cdot \varepsilon = -2.27 \cdot 10 \cdot 0.254 + 4.5 \cdot 10 \cdot 0.152$$

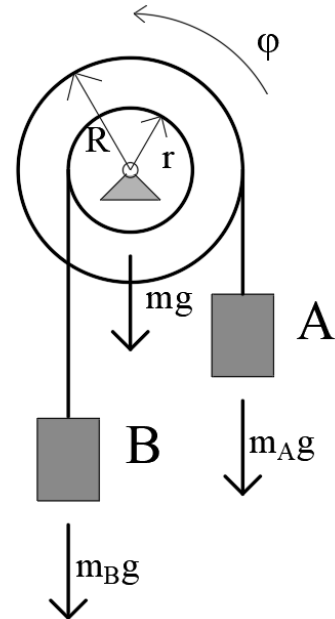
$$I_z \cdot \varepsilon = 1.0742$$

$$\varepsilon = \frac{1.0742}{0.224} = 4.80 \text{ rad/s}^2$$

- Убрзање тела А и В

$$a_A = \varepsilon \cdot R = 4.8 \cdot 0.254 = 1.22 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \varepsilon \cdot r = 4.8 \cdot 0.152 = 0.73 \text{ m/s}^2$$



**Задатак 3:** На котур В масе  $2m$ , полупречника  $R$ , повезано је тело А масе  $m$  као на слици. Одредити:

- Угаоно убрзање котура,  $\varepsilon = ?$ ;
- Силу у ужу,  $S = ?$

Из суме вертикалних сила да су једнаке нули, када посматрамо тело А, следи:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow m \cdot g - S - F_A^{in} = 0$$

$$F_A^{in} = m \cdot a_A$$

$$\boxed{m \cdot g - S - m \cdot a_A = 0} \dots (1)$$

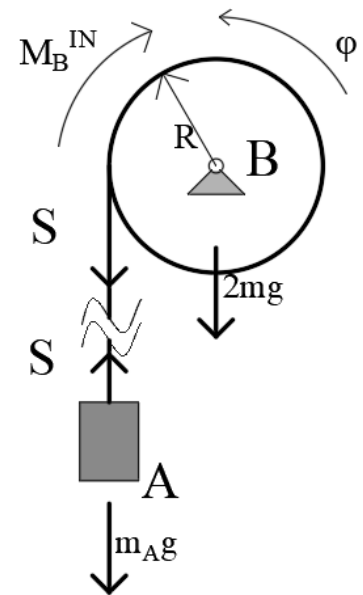
Из суме момената око центра диска да је једнака нули, следи да је:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow S \cdot R - M_B^{in} = 0$$

$$M_B^{in} = I_z \cdot \varepsilon$$

$$I_z = \frac{1}{2} 2m \cdot R^2 = m \cdot R^2$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \boxed{S \cdot R - m \cdot R^2 \cdot \varepsilon = 0} \dots (2)$$



Уколико из друге једначине изразимо силу  $S$

$$(2) \Rightarrow S = m \cdot R \cdot \varepsilon$$

и уврстимо у прву једначину

$$m \cdot g - S - m \cdot a_A = 0$$

$$m \cdot g - m \cdot R \cdot \varepsilon - m \cdot a_A = 0$$

угаоно убрзање котура може се одредити као:

$$\varepsilon = \frac{g - a_A}{R}$$

Убрзање тела  $A$

$$a_A = \varepsilon \cdot R \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_A}{R}$$

Изједначавањем узраза за угаоно убрзање котура добијамо убрзање тела  $A$ :

$$\frac{a_A}{R} = \frac{g - a_A}{R}$$

$$a_A = g - a_A \Rightarrow a_A = g/2$$

Угаоно убрзање котура једнако је:

$$\varepsilon = \frac{a_A}{R} = \frac{g}{2R}$$

а сила у ужету:

$$S = m \cdot R \cdot \varepsilon = m \cdot R \cdot \frac{g}{2R} = \frac{m \cdot g}{2}$$

**Задатак 4:** Тело  $A$ , масе  $m$ , се клиже по храпавој подлози која има коефицијент трења  $\mu$ . Котур  $B$ , масе  $2m$ , обрће се без тега око хоризонталне осе. Тело  $C$ , масе  $3m$ , креће се вертикално. Тела су повезана нерастегљивим ужетом према скици. Одредити:

- Убрзање тела  $A$  и  $C$ ,  $a_A = ?$  и  $a_C = ?$ ;
- Угаоно убрзање котура,  $\varepsilon = ?$ ;
- Силе у ужету,  $S_1 = ?$  и  $S_2 = ?$

$$R = 1\text{m}; m = 10\text{kg};$$

$$g = 10\text{ m/s}^2; \mu = 0.2.$$

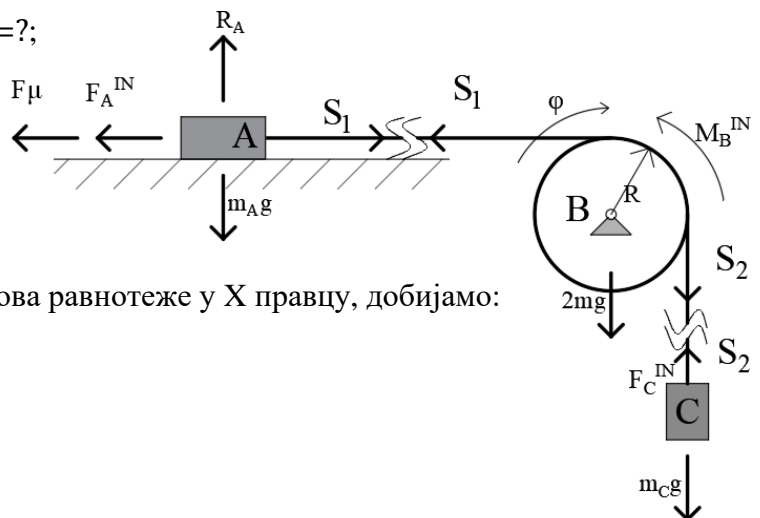
Издвајањем тела  $A$ , и исписивањем услова равнотеже у  $X$  правцу, добијамо:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -F_A^{in} - F_\mu + S_1 = 0$$

$$F_A^{in} = m \cdot a_A$$

$$F_\mu = R_A \cdot \mu$$

$$R_A = m \cdot g$$



$$\sum X = 0 \Rightarrow \boxed{-m \cdot a_A - m \cdot g \cdot \mu + S_1 = 0} \dots (1)$$

Из суме момената око центра диска да је једнака нули, следи да је:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot R - M_B^{in} + S_2 \cdot R = 0$$

$$M_B^{in} = I_z \cdot \varepsilon$$

$$I_z = \frac{1}{2} 2m \cdot R^2 = m \cdot R^2$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot R - m \cdot R^2 \cdot \varepsilon + S_2 \cdot R = 0$$

$$\boxed{-S_1 - m \cdot R \cdot \varepsilon + S_2 = 0} \dots (2)$$

Из суме вертикалних сила да су једнаке нули, када посматрамо тело В, следи:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow 3m \cdot g - S_2 - F_C^{in} = 0$$

$$F_C^{in} = m_C \cdot a_C = 3m \cdot a_C$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \boxed{3m \cdot g - S_2 - 3m \cdot a_C = 0} \dots (3)$$

Из једначина (1) и (3) потребно је изразити силе у ужадима:

$$(1) \Rightarrow S_1 = m \cdot a_A + m \cdot g \cdot \mu$$

$$(3) \Rightarrow S_2 = -3m \cdot a_C + 3m \cdot g$$

Уврштавањем ових израза у једначину (2)

$$-m \cdot a_A - m \cdot g \cdot \mu - m \cdot R \cdot \varepsilon - 3m \cdot a_C + 3m \cdot g = 0$$

$$-5 \cdot R \cdot \varepsilon - g \cdot \mu + 3g = 0$$

$$\varepsilon = \frac{-g \cdot \mu + 3g}{5R} = \frac{-10 \cdot 0.2 + 3 \cdot 10}{5} = 5.60 \text{ rad/s}^2$$

Убрзање тела А и С:

$$a_A = a_C = \varepsilon \cdot R = 5.6 \cdot 1 = 5.6 \text{ m/s}^2$$

Силе у ужету:

$$S_1 = m \cdot a_A + m \cdot g \cdot \mu = 10 \cdot 5.6 + 10 \cdot 10 \cdot 0.2 = 76 \text{ N}$$

$$S_2 = -3m \cdot a_C + 3m \cdot g = -3 \cdot 10 \cdot 5.6 + 3 \cdot 10 \cdot 10 = 132 \text{ N}$$