

ДИНАМИКА МАТЕРИЈАЛНОГ СИСТЕМА И КРУТОГ ТЕЛА

- Под појмом материјални систем разматра се систем коначног броја материјалних тачака које су на одређен начин повезане.
- Област простора испуњена непрекидно распоређеном масом представља материјално тело.

МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ МАТЕРИЈАЛНОГ СИСТЕМА

При обртном кретању материјалног система (крутог тела) мера инерције је момент инерције и представља карактеристику распореда маса. Разликујемо момент инерције материјалног система, односно крутог тела, у односу на:

- Пол (O) – поларни момент инерције;
- Осу (z) – аксијални момент инерције;
- Раван – планарни момент инерције.

Моменти инерције једнаки су збиру производа маса свих тачака система и квадрата растојања тачака од датог пола, осе или равни.

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2; \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_{iz}^2; \quad I_\pi = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_{i\pi}^2$$

Момент инерције у односу на произвољну осу (z) могуће је израчунати и као:

$$I_z = m \cdot \rho_z^2$$

ρ_z - полупречник инерције тог система.

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$

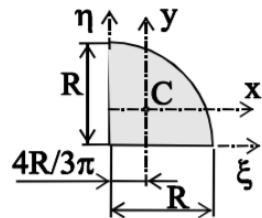
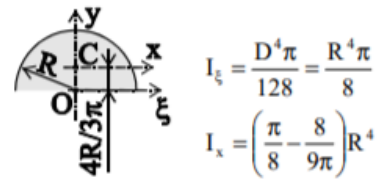
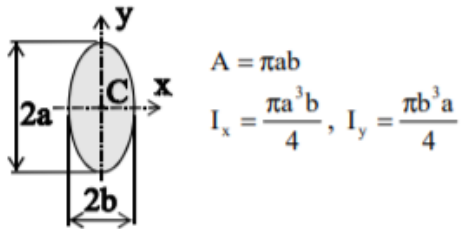
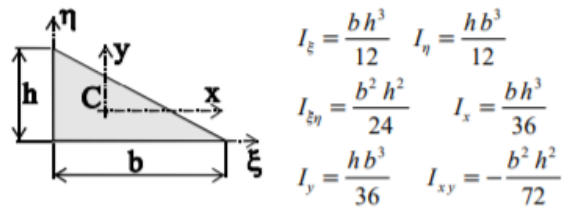
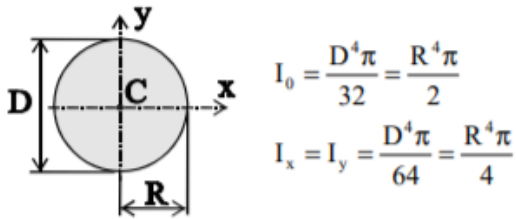
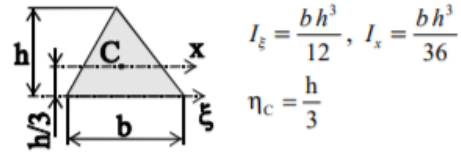
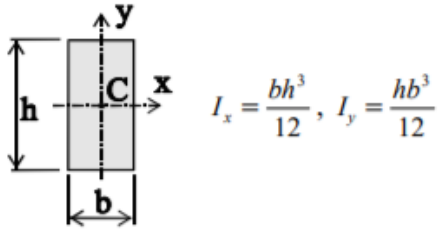
Хајгенс – Штајнерова теорема

$$I_{z1} = I_z + m \cdot d^2$$

I_z - сопствени момент инерције

$m \cdot d^2$ - положајни момент инерције

Сопствени момент инерције

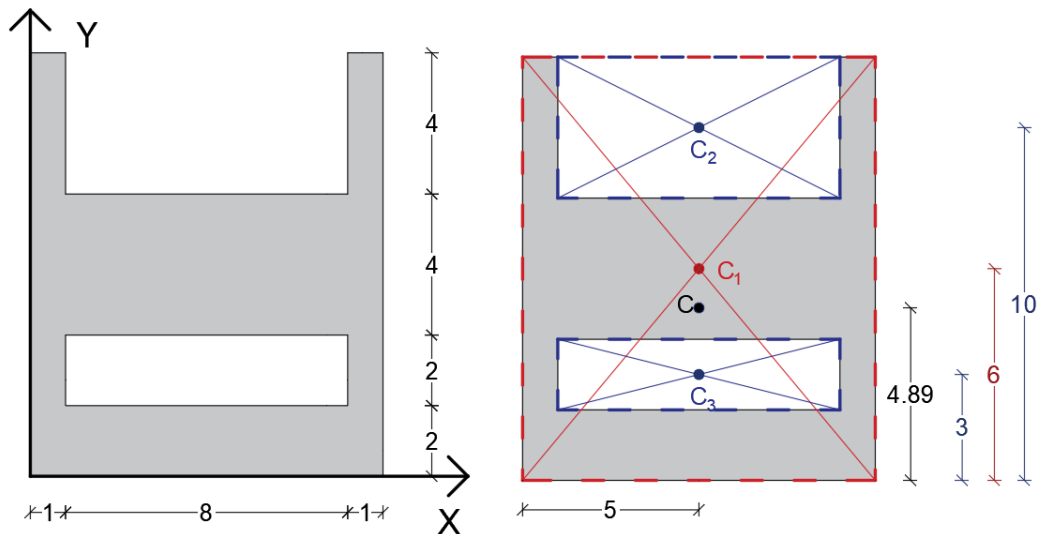


$$I_x = I_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)R^4$$

$$I_{xy} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)R^4$$

$$I_\xi = I_\eta = \frac{\pi R^4}{16}, I_{\xi\eta} = \frac{R^4}{8}$$

Задатак 1:



Тело	Тежиште C (x; y)	Површина F (cm ²)
1 (+)	C ₁ (5;6)	F ₁ =10x12=120
2 (-)	C ₂ (5;10)	F ₂ =8x4=32
3 (-)	C ₃ (5;3)	F ₃ =8x2=16

$$F = \sum_{i=1}^3 F_i = 120 - 32 - 16 = 72 \text{ cm}^2$$

Тежиште фигуре

Због симетрије X=5cm

$$Y = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^3 F_i \cdot y_i = \frac{120 \cdot 6 - 32 \cdot 10 - 16 \cdot 3}{72} = 4.89 \text{ cm}$$

Момент инерције:

$$I_{x1} = \frac{10 \cdot 12^3}{12} = 1440 \text{ cm}^4$$

$$I_{x2} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} = 42.67 \text{ cm}^4$$

$$I_{x3} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5.30 \text{ cm}^4$$

$$I_{y1} = \frac{10^3 \cdot 12}{12} = 1000 \text{ cm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{8^3 \cdot 4}{12} = 170.70 \text{ cm}^4$$

$$I_{y3} = \frac{8^3 \cdot 2}{12} = 85.30 \text{ cm}^4$$

$$I_x = \sum_{i=1}^3 I_{xi} + F_i \cdot \Delta y_i^2$$

$$\Delta y_1 = Y_1 - Y = 1.11 \text{ cm}$$

$$\Delta y_2 = Y_2 - Y = 5.11 \text{ cm}$$

$$\Delta y_3 = Y_3 - Y = -1.89 \text{ cm}$$

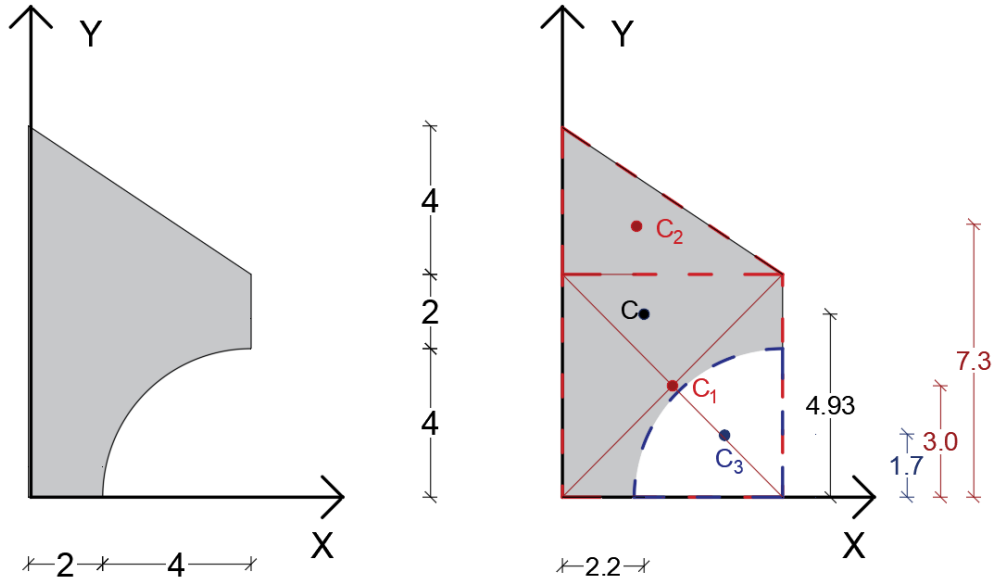
$$I_x = \sum_{i=1}^3 I_{xi} + F_i \cdot \Delta y_i^2 = 1440 + 120 \cdot 1.11^2 - 42.67 - 32 \cdot 5.11^2 - 5.30 - 16 \cdot (-1.89)^2 = 6471.10 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 I_{yi} + F_i \cdot \Delta x_i^2$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0 \text{ (због симетрије)}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 I_{yi} + F_i \cdot \Delta x_i^2 = 1000 + 120 \cdot 0 - 170.70 - 32 \cdot 0 - 85.30 - 16 \cdot 0 = 744 \text{ cm}^4$$

Задатак 2:



Тело	Тежиште C (x; y)	Површина F (cm ²)
1 (+)	C ₁ (3;3)	F ₁ =6x6=36
2 (+)	C ₂ (2;7.33)	F ₂ =6x4/2=12
3 (-)	C ₃ (4.30;1.70)	F ₃ =4 ² π/4=12.56

$$F = \sum_{i=1}^3 F_i = 36 + 12 - 12.56 = 35.44 \text{ cm}^2$$

Тежиште фигуре

$$X = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^3 F_i \cdot x_i = \frac{36 \cdot 3 + 12 \cdot 2 - 12.56 \cdot 4.3}{35.44} = 2.20 \text{ cm}$$

$$Y = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^3 F_i \cdot y_i = \frac{36 \cdot 3 + 12 \cdot 7.33 - 12.56 \cdot 1.7}{35.44} = 4.93 \text{ cm}$$

Момент инерције:

$$I_{x1} = \frac{6 \cdot 6^3}{12} = 108 \text{ cm}^4$$

$$I_{x2} = \frac{6 \cdot 4^3}{36} = 10.66 \text{ cm}^4$$

$$I_{x3} = 0.05488 \cdot 4^4 = 14.05 \text{ cm}^4$$

$$I_{y1} = \frac{6^3 \cdot 6}{12} = 108 \text{ cm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{6^3 \cdot 4}{36} = 24 \text{ cm}^4$$

$$I_{y3} = 0.05488 \cdot 4^4 = 14.05 \text{ cm}^4$$

$$I_x = \sum_{i=1}^3 I_{xi} + F_i \cdot \Delta y_i^2$$

$$\Delta y_1 = Y_1 - Y = 1.93 \text{ cm}$$

$$\Delta y_2 = Y_2 - Y = 2.40 \text{ cm}$$

$$\Delta y_3 = Y_3 - Y = -3.23 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^3 I_{xi} + F_i \cdot \Delta y_i^2 = 108 + 36 \cdot 1.93^2 + 10.66 + 12 \cdot 2.40^2 - 14.04 - 12.56 \cdot (-3.23)^2 \\ &= 176.78 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 I_{yi} + F_i \cdot \Delta x_i^2$$

$$\Delta x_1 = X_1 - X = 0.80 \text{ cm}$$

$$\Delta x_2 = X_2 - X = -0.2 \text{ cm}$$

$$\Delta x_3 = X_3 - X = 2.10 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \sum_{i=1}^3 I_{yi} + F_i \cdot \Delta x_i^2 = 108 + 36 \cdot 0.8^2 + 10.66 + 12 \cdot (-0.2)^2 - 14.04 - 12.56 \cdot 2.1^2 \\ &= 86.08 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$