НЕСЛОБОДНО ИЛИ ВЕЗАНО КРЕТАЊЕ ТЕЛА

Неслободно или везано кретање је кретање по одређеној линији, површи или дела просторра услед дејства активних сила. Основна једначина динамике за неслободну тачку:

$$\boldsymbol{m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{N}}$$

$\boldsymbol{\vec{F}}$- резултатнта активних сила

$\boldsymbol{\vec{N}}$- резултатнта реакција веза

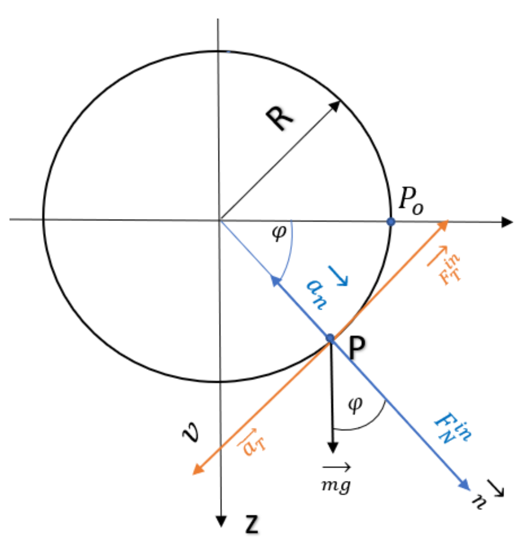
ДАЛАМБЕРОВ ПРИНЦИП ЗА МАТЕРИЈАЛНУ ТАЧКУ

Ако се материјална тачка креће по непокретној кривој линији или површи и изложена је дејству спољашних сила, тада се веза која ограничава кретање тачке укине и замени реакцијом везе $\overrightarrow{F_N}$. Проблем се своди на решавање кретања слободне материјалне тачке под дејством спољашњих сила F_A, сила везе F_N и сила инерције F_n^{in}. Силе инерције су увек у супротном смеру од брзине.

$$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_n^{in}} = 0$$

$$\overrightarrow{F_n^{in}} = m \cdot \vec{a}$$

Задатак 1: Материјална тачка **P** масе **m** креће се по глаткој кружници у вертикалној равни полазећи из тачке $\boldsymbol{P_0}$ без почетне брзине према скици. Одредити силе веза у положају **P** који је одређен углом $\boldsymbol{\varphi}$. $\boldsymbol{F_N} = ?$



Даламберов принцип:

$$m \cdot \vec{g} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F^{in}} = 0$$
$$\overrightarrow{F^{in}} = \overrightarrow{F_T^{in}} + \overrightarrow{F_N^{in}}$$
$$\overrightarrow{F_T^{in}} = -m \cdot \overrightarrow{a_T}$$
$$\overrightarrow{F_N^{in}} = -m \cdot \overrightarrow{a_N}$$
$$m \cdot \vec{g} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_T^{in}} + \overrightarrow{F_N^{in}} = 0$$

Једначину сводимо на $\boldsymbol{\vec{n}}$ осу

$$-m \cdot g \cdot \sin\varphi + F_N - F_N^{in} = 0$$
$$F_N^{in} = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{\rho} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$
$$-m \cdot g \cdot \sin\varphi + F_N - m \cdot \frac{v^2}{R} = 0$$
$$\overrightarrow{F_N} = m \cdot g \cdot \sin\varphi + m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Закон о одржању механичке енергије:

$$E_k + E_P = h = const$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_P = -m \cdot g \cdot z = -m \cdot g \cdot R \sin\varphi$$

$$E_k + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot R \sin\varphi = h$$

Константу h одређујемо из почетних услова:

$$t = 0;\ v = 0;\ z = 0;\ \varphi = 0$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - m \cdot g \cdot R \cdot \sin\varphi = h$$

$$h = 0$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot R \cdot \sin\varphi = 0 \quad /: R \cdot 2$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = 2m \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \sin\varphi + m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \sin\varphi + 2m \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$F_N = 3m \cdot g \cdot \sin\varphi$$

Задатак 2: Да би се заштитио коловоз од могућег одрона, стена изнад пута је профилисана као на скици. На делу $\overline{AC}$ стена је храпава, μ-коефицијент храпавости, док је на делу $\overline{CB}$ идеално глатка. Потребно је:

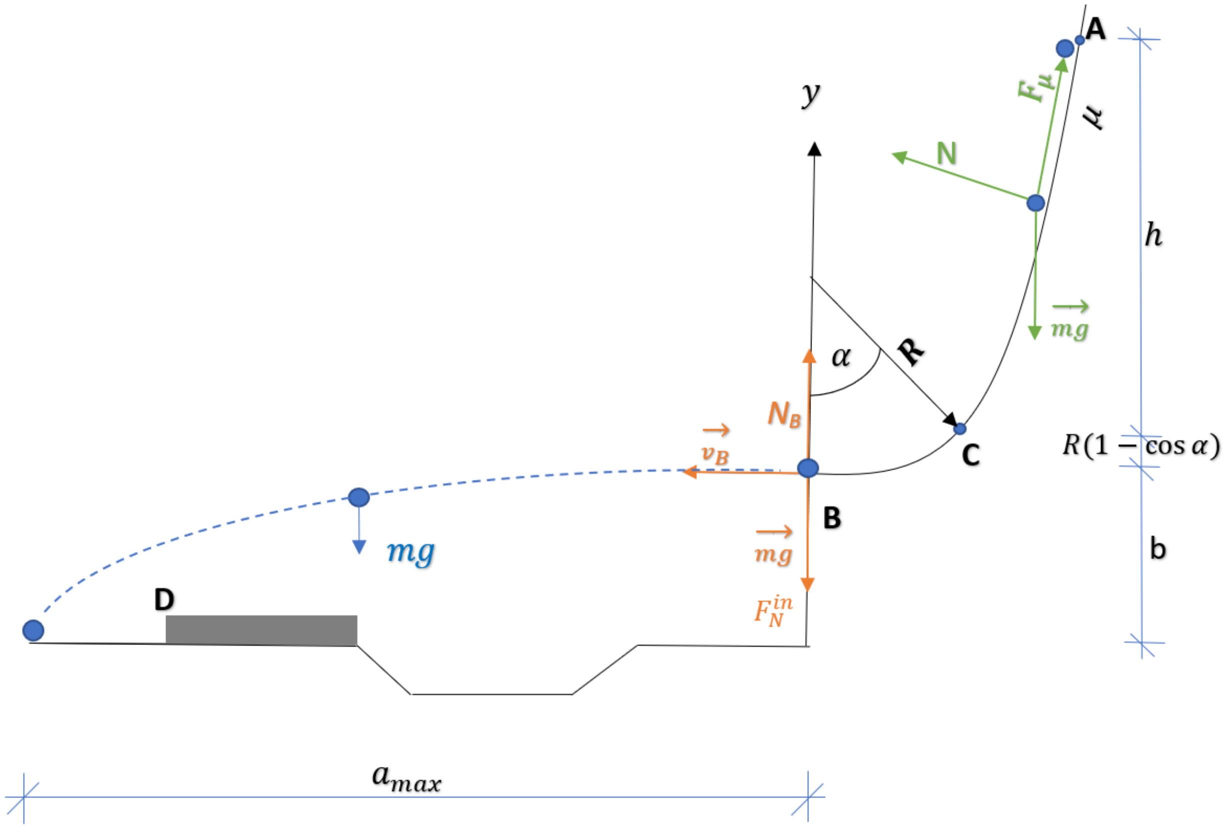
a) Одредити брзину камена који је без почетне брзине почео да пада из положаја А у тренутку кад напушта везу;
b) Одредити притисак у положају Б (притисак на подлогу);
c) Саставити диференцијалну једначину кретања и коначну једначину кретања на делу $\overline{BD}$;
d) Одредити максималну ширину пута a_{max} са јарком под условом да камење приликом одрона пада ван коловоза (лево од тачке D).

b=4m; h=3.5m;

R=2m; m=5.5kg;

μ=0.15; $g=10m/s^2$

$$\alpha = 30°$$



a) Из закона о прираштају (промени кинетичке енергије) одређује се брзина камена у тренутку када напушта везу.

$$T_B - T_A = \Sigma A$$

$$\frac{1}{2}m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_A^2 = A_{(mg)} + A_{(\mu)}$$

$$A_{(mg)} = mg(h + R(1 - \cos\alpha))$$

$$A_{(\mu)} = -F_\mu \cdot \overline{AC}$$

$$F_\mu = N \cdot \mu = m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \mu$$

$$A_{(\mu)} = -m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \mu \cdot \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 = m \cdot g \cdot (h + R(1 - \cos\alpha)) - m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \mu \cdot \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{2g \cdot (h + R(1 - \cos\alpha) - 2g \cdot \cos\alpha \cdot \mu \cdot \frac{h}{\sin\alpha}} = 7{,}53\, {}^{m}/_{s}$$

b) Притисак на подлогу у тачки B

$$\Sigma Y = 0$$

$$-mg + N_B - F_n^{in} = 0$$

$$F_n^{in} = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v_B^2}{\rho} = 155{,}93\ N$$

$$N_B = m \cdot g + F_n^{in} = 5{,}5 * 10 + 155{,}93 = 210{,}93\ N$$

c) Диференцијална једначина за слободно кретање

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$x: \quad m \cdot \ddot{x} = 0 \quad /{:}\,m$$
$$\ddot{x} = 0 \quad /\int$$
$$\dot{x} = C_1 \quad /\int$$
$$x = C_1 t + C_2$$

$$Y: \quad m * \ddot{Y} = -m * g$$
$$\ddot{Y} = -g \quad /\int$$
$$\dot{Y} = -g * t + C_3 \quad /\int$$
$$Y = \frac{-g}{2} * t^2 + C_3 * t + C_4$$

Константе C_1, C_2, C_3 и C_4 одређују се из почетних услова:

$$t = 0; \quad x = 0 \Rightarrow \quad C_1 * t + C_2 = 0$$
$$C_2 = 0$$
$$\dot{x} = v_B \Rightarrow v_B = C_1$$

$$t = 0 \Rightarrow Y = b \Rightarrow b = C_4$$
$$\dot{Y} = 0 \Rightarrow \dot{Y} = -g * t + C_3 = 0$$
$$C_3 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = v_B * t}} \qquad (1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{Y = -\frac{g}{2} * t^2 + b}} \qquad (2)$$

d) Максимална ширина пута одређује се из једначине путање

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_B} \Rightarrow (2)\ Y = \frac{-g}{2} * \frac{x^2}{v_B} + b$$

У тренутку када камен падне на подлогу имамо да је

$$Y = 0 \Rightarrow$$

$$0 = \frac{-10}{2} * \frac{x^2}{7{,}53^2} + 4 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4 * 7{,}53^2}{5}} = 6{,}74m$$