ДИНАМИКА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

- изучава кретање материјалне тачке са коначном масом на коју делују силе;
- ако се димензије тела при кретању могу занемарити онда имамо материјалну тачку која има коначну масу.

Основни задатак динамике материјалне тачке:

- познато кретање материјалне тачке или тела, одређују се силе које изазивају то кретање;
- познате силе које делују потребно је одредити кретање материјалне тачке или тела.

Основни закон динамике: II Њутнов закон

Брзина промене количине кретања материјалне тачке (тела) једнака је по интезитету, правцу и смеру сили која делује на материјалну тачку или тело

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Тежина је сила којом земља привлачи тело, док је маса константа и одређује карактеристику тела:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g}$$

$$m = \frac{\vec{G}}{\vec{g}}, \qquad g \approx 9{,}81\ {}^{m}/_{s^2}$$

КРЕТАЊЕ СЛОБОДНЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

- **Декартов координатни систем**

Диференцијалне једначине кретања

$$\boldsymbol{m \cdot \vec{a} = \vec{F}}$$
$$m \cdot \ddot{x} = X$$
$$m \cdot \ddot{y} = Y$$
$$m \cdot \ddot{z} = Z$$

$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – пројекције вектора убрзања $\vec{a}$

X, Y, Z – пројекције резултујуће силе $\vec{F}$

- **Поларне координате**

Диференцијалне једначине кретања

$$m \cdot \vec{a_r} = \vec{F_r}$$
$$m \cdot (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) = \sum_{i=1}^{n} F_{ir}$$

$$m \cdot \vec{a_p} = \vec{F_p}$$
$$m \cdot (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) = \sum_{i=1}^{n} F_{ip}$$

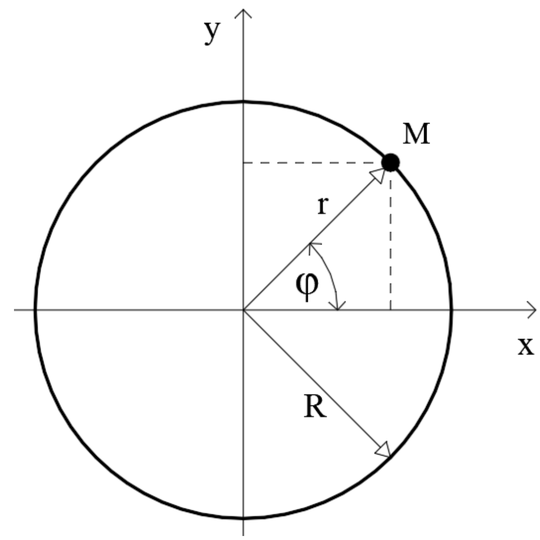
- **Природни координатни систем**

Диференцијалне једначине кретања

$$m \cdot a_T = F_T$$
$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = F_T$$

$$m \cdot a_n = F_n$$
$$m \cdot \frac{v^2}{\rho} = F_n$$

Задатак 1: Материјална тачка М креће се у равни $x - 0 - y$ према датим једначинама
$x = R \cdot cos(\omega \cdot t)$,
$y = R \cdot sin(\omega \cdot t)$.
Одредити силу која делује на тачку.



$$x = R \cdot cos(\omega \cdot t)\ /^2$$
$$+$$
$$y = R \cdot sin(\omega \cdot t)\ /^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2\ \underbrace{(\cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t))}_{1}$$
$$x^2 + y^2 = R^2$$

$\vec{F} = ?$ $\qquad \dot{x} = -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ $\qquad \dot{y} = R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$\vec{F} = \{x, y\}$ $\qquad \ddot{x} = -R \cdot \omega^2 \cos(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot x$

$\vec{a} = \{\ddot{x}, \ddot{y}\}$ $\qquad \ddot{y} = -R \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot y$

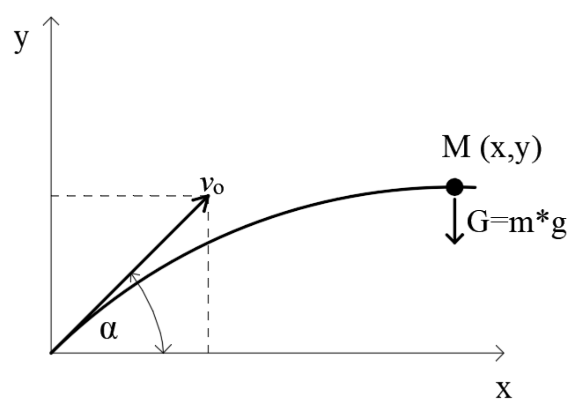
$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j}$$
$$= -\omega^2 \cdot x \cdot \vec{i} - \omega^2 \cdot y \cdot \vec{j}$$
$$= -\omega^2\ \underbrace{(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j})}_{\vec{r}}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot (-\omega^2) \cdot \vec{r}$$
$$|\vec{F}| = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Задатак 2: Материјална тачка масе m је бачена из координатног почетка почетном брзином v_0 под углом α. Одредити трајекторију и написати коначну једначину кретања.

II Њутн-ов закон: $\qquad m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{G} = m \cdot \vec{g}$$
$$\vec{a} = \{\ddot{x}, \ddot{y}\}$$
$$m \cdot \vec{g} = m\{0; -g\}$$



$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g}$ - диференцијална једначина кретања у векторском облику

$$m \cdot \ddot{x} = {}^{0}/_{:m}$$
$$\ddot{x} = 0 / \int$$
$$\int \ddot{x} = \int 0$$
$$\dot{x} = C_1 \ / \int$$
$$x = C_1 \cdot t + C_2$$

$$m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g / : m$$
$$\ddot{y} = -g / \int$$
$$\int \ddot{y} = \int -g$$
$$\dot{y} = -g \cdot t + C_3 / \int$$
$$y = -g \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4$$

Константе C_1, C_2, C_3 и C_4 одређују се из почетних услова:

$$t = 0 \implies x = 0$$
$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha$$
$$x = C_1 \cdot t + C_2$$
$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2$$
$$C_2 = 0$$
$$\dot{x} = C_1$$
$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha = C_1$$
$$\boxed{x = v_0 \cos\alpha \cdot t} \quad (1)$$

$$t = 0 \implies y = 0$$
$$\dot{y} = v_0 \sin\alpha$$
$$y = -g \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4$$
$$0 = \frac{-g \cdot 0}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$$
$$\dot{y} = -g \cdot t + C_3$$
$$v_0 \cdot \sin\alpha = -g \cdot 0 + C_3$$
$$C_3 = v_0 \cdot \sin\alpha$$
$$\boxed{y = -g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t} \quad (2)$$

Уколико из прве коначне једначине изразимо t

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\, cos\, \alpha}$$

и уврстимо у другу једначину

$$t \Rightarrow (2) \Rightarrow y = \frac{-g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot cos^2\, \alpha} + v_0 \cdot sin\, \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot cos\, \alpha}$$

добија се трајекторија:

$$y = \frac{-g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x$$

У тренутку када материјална тачка падне на подлогу имамо да је

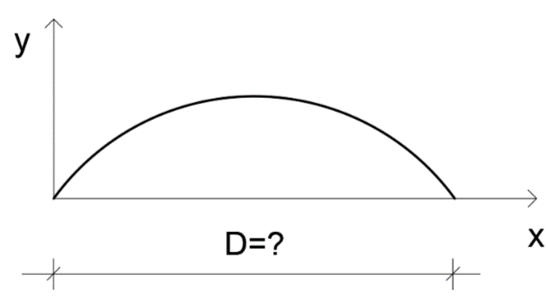
$$y = 0 \Rightarrow 0 = x \cdot \left(\frac{-g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x + \tan\alpha \right)$$

а ординату *x* одређујемо:

$$\frac{-g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x + \tan\alpha = 0$$

$$x = \frac{\tan\alpha \cdot 2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{g}$$

$$x = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha \cdot v_0^2}{g} = \frac{\sin 2\alpha \cdot v_0^2}{g}$$

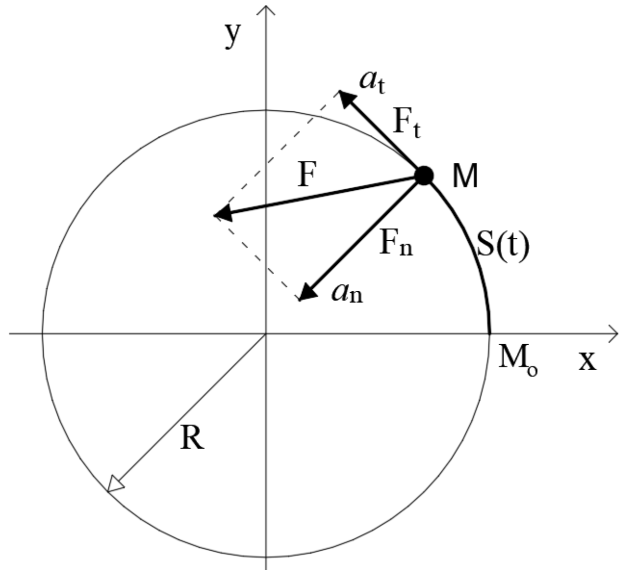


Задатак 3: Материјална тачка М масе m=0,2 kg креће се по кружници која лежи у хоризонталној равни помоћу танке нерастегљиве жице занемарљиве масе по закону S=2·t^3, R=2m. Одредити интезитет силе која делује у тренутку t=1s

$F = ?$

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

$\vec{F} = \overrightarrow{F_t} + \overrightarrow{F_n}$



Природни координатни систем

$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$

$m \cdot \vec{a} = \overrightarrow{F_T} + \overrightarrow{F_n}$

t: $m \cdot \overrightarrow{a_T} = \overrightarrow{F_T}$

n: $m \cdot \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{F_n}$

$v = \frac{ds}{dt} = 6 \cdot t^2$

$v_{(t=1s)} = 6 \cdot 1^2 = 6\, {}^{m}/_{s}$

$a_t = \frac{dv}{dt} = 12 \cdot t$

$a_{t(t=1s)} = 12 \cdot 1 = 12\, {}^{m}/_{s^2}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

$a_{n(t=1s)} = \frac{6^2}{2} = 18\, {}^{m}/_{s^2}$

$m \cdot a_T = F_T$

$0{,}2kg \cdot 12\, {}^{m}/_{s^2} = 2{,}4N = F_T$

$m \cdot a_n = F_n$

$0{,}2kg \cdot 18\, {}^{m}/_{s^2} = 3{,}6N = F_n$

$F = |\vec{F}| = \sqrt{{F_n}^2 + {F_T}^2} = 4{,}35N$