

КИНЕМАТИКА КРУТОГ ТЕЛА

Под крутим телом у механици се подразумева тело које не мења свој геометријски облик. За дефинисање положаја крутог тела у простору довољно је да се познаје положај у 3 неколинеарне тачке тела.

Основни задатак кинематике крутог тела је:

1. Дефинисање положаја крутог тела
2. Одређивање кинематичких карактеристика кретања крутог тела

Основна кретања крутог тела су транслаторно и обртно кретање, од којих се састоје и сва остала кретања.

Обртање крутог тела око непокретне осе

Положај крутог тела као целине при обртању око непокретне осе одређен је са углом обртања

$$\varphi = \varphi(t)$$

Угаона брзина тела у датом тренутку времена једнака је:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

а угаоно убрзање:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Уколико је:

- $\omega = \dot{\varphi} > 0$ обртање је позитивно (супротно од смера казаљке на сату)
- $\omega = \dot{\varphi} < 0$ обртање је негативно (у смеру казаљке на сату)
- $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} > 0$ угаона брзина и убрзање имају исти смер
- $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} < 0$ угаона брзина и убрзање имају различит смер

Закон кретања тачке по кружној путањи: $s = r \cdot \varphi(t)$

r је полупречник кружне путање.

Брзина тачке: $v = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega$

ω је угаона брзина тела као целине једнака за све тачке тела.

Убрзање тачке крутог тела: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$; $a_T = r \cdot \varepsilon$; $a_N = r \cdot \dot{\varphi}^2 = r \cdot \omega^2$

Интензитет убрзања тачке крутог тела: $[\vec{a}] = a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

ЗАДАЦИ

1. Круто тело обрће се око непомичне осе по закону $\varphi = 2t + 4t^2$, $\varphi[\text{rad}], t[\text{s}]$. Одредити угаону брзину и угаоно убрзање тела, а затим брзину, тангенцијално и нормално убрзање тачке тела која се налази на $r = 0.5\text{m}$ од осе обртања у тренутку $t = 1\text{s}$.

Закон обртања:

$$\varphi = 2t + 4t^2$$

Угаона брзина тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Први извод угла обртања:

$$\dot{\varphi} = 2 + 8t$$

У тренутку $t = 1\text{s}$

$$\omega = \dot{\varphi} = 2 + 8 \cdot 1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Угаоно убрзање тела:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Други извод угла обртања:

$$\ddot{\varphi} = 8$$

У тренутку $t = 1\text{s}$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Брзина тачке тела:

$$v = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega$$

У тренутку $t = 1\text{s}$

$$v = 0.5 \cdot 10 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Тангенцијално убрзање тачке тела:

$$a_T = r \cdot \varepsilon$$

У тренутку $t = 1\text{s}$

$$a_T = 0.5 \cdot 8 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Нормално убрзање тачке тела:

$$a_N = r \cdot \dot{\varphi}^2 = r \cdot \omega^2$$

У тренутку $t = 1\text{s}$

$$a_N = 0.5 \cdot 10^2 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Интензитет убрзања:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

$$a = \sqrt{(4)^2 + (50)^2} = 50.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2. Ваљак полупречника $r = 2\text{m}$ обрће се једнако убрзано из стања мировања. Тачке које се налазе на његовом обиму у тренутку $t_1 = 10\text{s}$ имају брзину $v = 100\text{m/s}$. Одредити брзину, тангенцијално и нормално убрзање тачака по обиму тела у тренутку $t_2 = 15\text{s}$.

$$r = 2\text{m}$$

$$t_1 = 10\text{s}$$

$$v_1 = 100\text{m/s}$$

$$t_2 = 15\text{s}$$

$$v_2 = ?$$

$$a_T = ?$$

$$a_N = ?$$

Брзина тачке тела:

$$v = r \cdot \omega$$

Угаоно убрзање тела:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\varepsilon dt = d\omega$$

$$\int \varepsilon dt = \int d\omega$$

$$\boxed{\varepsilon t + C = \omega}$$

Константа C се одређује из почетних услова: Ваљак се обрће једнако убрзано из стања мировања

$$t = 0 \Rightarrow \omega = 0$$
$$\varepsilon \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Угаона брзина тела:

$$\boxed{\omega = \varepsilon t}$$

У тренутку $t_1 = 10s$

$$v_1 = r \cdot \omega = 100 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{v_1}{r} = \frac{100}{2} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t_1} = \frac{50}{10} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

У тренутку $t_2 = 15s$

Брзина тачке тела:

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \varepsilon \cdot t_2 = 2 \cdot 5 \cdot 15$$
$$= 150 \text{ m/s}$$

Тангенцијално убрзање тачке тела:

$$a_T = r \cdot \varepsilon = 2 \cdot 5 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Нормално убрзање тачке тела:

$$a_N = r \cdot \omega^2 = r \cdot \left(\frac{v_2}{r}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{150}{2}\right)^2$$
$$= 11250 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$