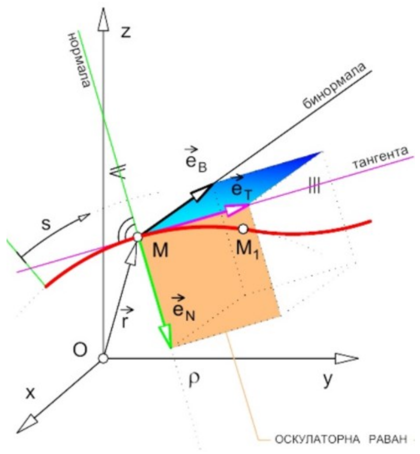
Кинематика материјалне тачке у природним координатама

Положај тачке М у природним координатама описује се помоћу координатног система смештеног у тачки М који се креће по путањи заједно са тачком. Положај тачке на путањи одређен је дужином лука (s), где је:



s – закон пута или закон кретања тачке по путу
Положај тачке је једнак:

$$\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$$

<u>Брзина материјалне тачке</u>

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{s}}}{dt}\overrightarrow{e_T} = \dot{s}\,\overrightarrow{e_T}$$

Интензитет брзине материјалне тачке:

$$[\vec{v}] = v = \dot{s}$$

<u>Убрзање материјалне тачке</u>

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}\overrightarrow{e_T} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{e_N}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

Интензитет убрзања материјалне тачке:

$$[\vec{a}] = a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2}$$

Где су ортогонални јединични вектори у смеру:

- Тангенте $\overrightarrow{e_T}$
- Нормале $\overrightarrow{e_N}$

ЗАДАЦИ

1. Дате су коначне једначине кретања материјалне тачке $x = t^2; y = t^3; x, y\ [m]$; $t[s]$. Одредити полупречник кривине у $t = 1s$. $\rho = ?$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N}$$

<u>Вектор брзине:</u>

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\dot{x} = 2t$$

$$\dot{y} = 3t^2$$

$$\vec{v} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$$

<u>Интензитет брзине:</u>

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$v = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}$$

у тренутку $t = 1s$

$$v = \sqrt{(2 \cdot 1)^2 + (3 \cdot 1)^2} = \sqrt{13}\frac{m}{s}$$

$$a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2} \Rightarrow \boxed{a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}}$$

<u>Вектор убрзања:</u>

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

$$\ddot{x} = 2$$

$$\ddot{y} = 6t$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 6t\vec{j}$$

<u>Интензитет убрзања:</u>

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

$$a = \sqrt{(2)^2 + (6t)^2}$$

у тренутку $t = 1s$

$$a = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} = \sqrt{40}\frac{m}{s^2}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\right] = \frac{4 + 18t^2}{\sqrt{4 + 9t^2}}$$

у тренутку $t = 1s$

$$a_T = \frac{4 + 18 \cdot 1^2}{\sqrt{4 + 9 \cdot 1^2}} = \frac{22}{\sqrt{13}}$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{40}\right)^2 - \left(\frac{22}{\sqrt{13}}\right)^2} = 1.664$$

<u>**Полупречник кривине:**</u>

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\sqrt{13}^2}{1.664} = 7.81m$$

2. Материјална тачка се креће у равни $x - O - y$ константним убрзањем $a = 2\,m/s^2$ $(\vec{a} = 2\vec{i})$. Одредити полупречник кривине у $t = 1s$, ако је $v_0 = 2\,m/s$ и $\alpha_{v_0} = 60°$. $\rho = ?$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N}$$

Вектор брзине:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

Вектор убрзања:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = 2\vec{i}$$

$$\ddot{x} = 2 \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = 2$$

$$d\dot{x} = 2dt$$

$$\int d\dot{x} = \int 2dt$$

$$\boxed{\dot{x} = 2t + C_1}$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = 0$$

$$d\dot{y} = 0dt$$

$$\int d\dot{y} = \int 0dt$$

$$\boxed{\dot{y} = C_2}$$

Константе C_1 и C_2 одређују се из почетних услова:

Први извод x по времену:

$$t = 0 \Rightarrow \dot{x} = v_0 \cdot cos\alpha_{v_0} = 2 \cdot cos60 = 1\frac{m}{s}$$

$$\dot{x} = 2t + C_1 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$$

$$t = 0 \Rightarrow \dot{y} = v_0 \cdot sin\alpha_{v_0} = 2 \cdot sin60 = 1.73\frac{m}{s}$$

$$\dot{y} = C_2 \Rightarrow 1.73 = C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1.73}$$

$$\boxed{\dot{x} = 2t + 1}$$

$$\boxed{\dot{y} = 1.73}$$

Интензитет брзине:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$v = \sqrt{(2t+1)^2 + 3}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{(2t+1)^2 + 3}\right] = \frac{2(2t+1)}{\sqrt{(2t+1)^2 + 3}}$$

у тренутку $t = 1s$

$$a_T = \frac{2(2 \cdot 1 + 1)}{\sqrt{(2 \cdot 1 + 1)^2 + 3}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}\frac{m}{s^2}$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2} = \sqrt{(2)^2 - \sqrt{3}^2} = 1\frac{m}{s^2}$$

Полупречник кривине:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\sqrt{12}^2}{1} = 12m$$