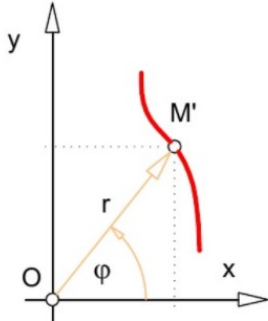


## Кинематика материјалне тачке у поларном координатном систему

Положај тачке М одређен је поларним координатама:



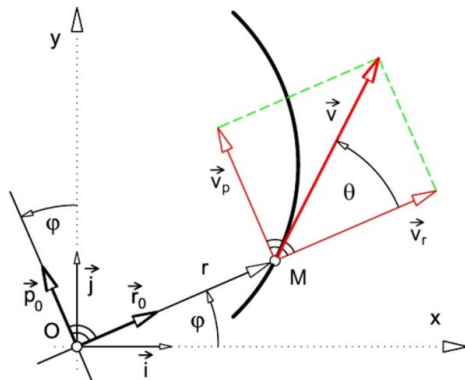
$$r = r(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

где је  $r$  поларно растојање-потег, а  $\varphi$  поларни угао.

### Брзина материјалне тачке

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p$$



Радијална брзина тачке:  $\vec{v}_r = \dot{r}\vec{r}_0$

Попречна-циркуларна брзина тачке:  $\vec{v}_p = r\dot{\varphi}\vec{p}_0$

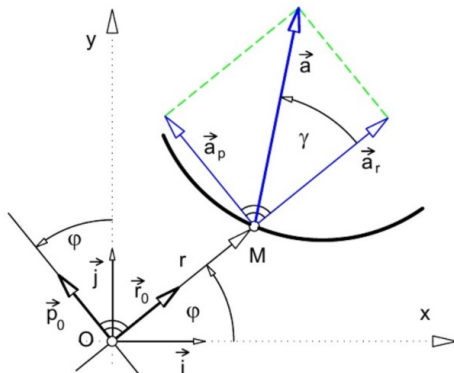
$\vec{r}_0, \vec{p}_0$  – јединични вектори

Интензитет брзине материјалне тачке:

$$[\vec{v}] = v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2}$$

### Убрзање материјалне тачке

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p$$



Радијално убрзање тачке:  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

Попречно-циркуларно убрзање тачке:

$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

Интензитет убрзања материјалне тачке:

$$[\vec{a}] = a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$$

## Посебан случај – кретање по кружној путањи

$$r = \text{const} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_p = r\dot{\varphi}\vec{p}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p = -r\dot{\varphi}^2\vec{r}_0 + r\ddot{\varphi}\vec{p}_0$$

## ЗАДАЦИ

1. Материјална тачка се креће у равни  $xOy$  по кружној путањи ( $r = \text{const}$ )

$$\varphi(t) = \frac{\alpha t^2}{2} [\text{rad}].$$

Одредити брзину и убрзање материјалне тачке.

$$r = \text{const} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

- Вектор брзине:

$$\vec{v} = ?$$

$$\vec{v} = \vec{v}_p = r\dot{\varphi}\vec{p}_0$$

$$\varphi(t) = \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha t$$

$$\vec{v} = r\alpha t\vec{p}_0$$

- Интензитет брзине:

$$v = \sqrt{(r\alpha t)^2} = r\alpha t$$

- Вектор убрзања:

$$\vec{a} = ?$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p = -r\dot{\varphi}^2\vec{r}_0 + r\ddot{\varphi}\vec{p}_0$$

$$\ddot{\varphi} = \alpha$$

$$\vec{a} = -r(\alpha t)^2\vec{r}_0 + r\alpha\vec{p}_0$$

- Интензитет убрзања:

$$a = \sqrt{(-r(\alpha t)^2)^2 + (r\alpha)^2}$$

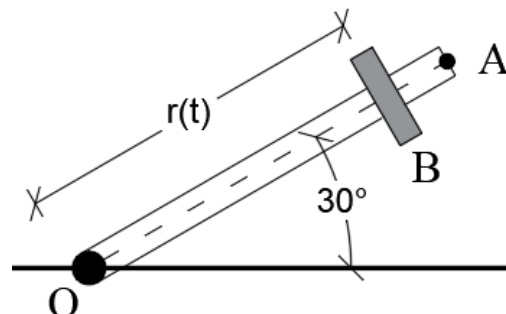
$$a = r\alpha\sqrt{\alpha^2 t^4 + 1}$$

2. Дате су коначне једначине кретања:  $\varphi = 0.15t^2$  и  $r = 0.9 - 0.12t^2$ . Дуж штапа се креће прстен В чији је положај одређен са координатом  $r$ . Штап ОА се обрће око тачке О у равни цртежа. Одредити убрзање и брзину када је  $\varphi = 30^\circ$ .

$$\vec{v} = ? \quad \vec{a} = ?$$

$$\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6} = 0.524 \text{ rad}$$

$$\varphi = 0.15t^2 \quad (1)$$



$$\Rightarrow t^2 = \frac{0.524}{0.15} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{0.524}{0.15}} = 1.869 \text{ s}$$

$$r = 0.9 - 0.12t^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow r = 0.9 - 0.12 \cdot 1.869 = 0.481m$$

- Вектор брзине:

$$\vec{v} = ?$$

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\phi}\vec{p}_0$$

$$\dot{r} = -0.24t$$

$$\dot{\phi} = 0.3t$$

$$\vec{v} = -0.24t\vec{r}_0 + r \cdot 0.3 \cdot t\vec{p}_0$$

$$\vec{v} = -0.24 \cdot 1.869\vec{r}_0 + 0.481 \cdot 0.3 \cdot 1.869\vec{p}_0$$

$$\vec{v} = -0.449\vec{r}_0 + 0.27\vec{p}_0$$

- Интензитет брзине:

$$v = \sqrt{(-0.449)^2 + (0.27)^2}$$

$$v = \mathbf{0.524m/s}$$

- Вектор убрзања:

$$\vec{a} = ?$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{r}_0 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{p}_0$$

$$\ddot{r} = -0.24$$

$$\ddot{\phi} = 0.3$$

$$\vec{a} = (-0.24 - 0.481 \cdot (0.3 \cdot 1.869)^2)\vec{r}_0 + (0.481 \cdot 0.3 - 2 \cdot 0.24 \cdot 1.869 \cdot 0.3 \cdot 1.869)\vec{p}_0$$

$$\vec{a} = -0.391\vec{r}_0 - 0.359\vec{p}_0$$

- Интензитет убрзања:

$$a = \sqrt{(-0.391)^2 + (-0.359)^2}$$

$$a = \mathbf{0.531 m/s^2}$$